

هندسه ۳



فصل دوم: مقاطع مخروطی



مدرس:



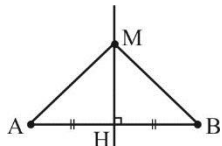
درس اول: آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

* مکان هندسی

تعریف مکان هندسی: مجموعه‌ی نقاطی از صفحه یا فضا که دارای یک ویژگی مشترک هستند را مکان هندسی می‌نامیم، یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که این ویژگی را دارد، عضو این مجموعه است.

مکان هندسی‌های مهم در صفحه:

۱- از هندسه ۱ به یاد داریم که عمودمنصف یک پاره‌خط دارای دو ویژگی است:

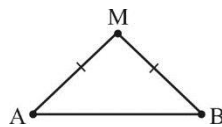


الف) هر نقطه روی عمودمنصف، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است،

$$M \text{ روی عمودمنصف } AB \Rightarrow MA = MB$$

ب) هر نقطه که از دو سر پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف قرار دارد،

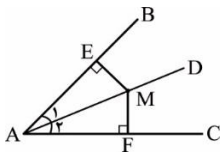
$$M \text{ روی عمودمنصف } AB \Rightarrow MA = MB \text{ در صفحه به طوری که}$$



به طور خلاصه، یک نقطه روی عمودمنصف پاره خط است، اگر و تنها اگر از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می‌گوییم «عمودمنصف یک پاره‌خط، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله‌اند».

۲- از هندسه ۱ به یاد داریم که نیمساز یک زاویه دارای دو ویژگی است:

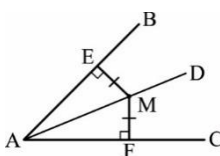


الف) هر نقطه مانند M روی نیمساز زاویه‌ی A از دو ضلع زاویه به یک فاصله است،

$$M \text{ روی نیمساز } \hat{A} \Rightarrow ME = MF$$

ب) هر نقطه مانند M که از دو ضلع زاویه‌ی A به یک فاصله باشد، روی نیمساز زاویه‌ی A قرار دارد،

$$M \text{ روی نیمساز } \hat{A} \Rightarrow ME = MF \text{ در صفحه به طوری که}$$



به طور خلاصه، یک نقطه روی نیمساز یک زاویه است، اگر و تنها اگر از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله باشد.

به عبارت معادل، می‌گوییم «نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله‌اند».

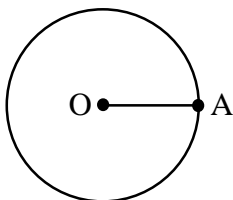
۳- از هندسه ۲ به یاد داریم که دایره دارای دو ویژگی است:

الف) فاصله هر نقطه مانند A روی دایره از مرکز دایره برابر شعاع دایره است،

$$A \text{ روی دایره} \Rightarrow OA = R$$

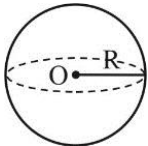
ب) هر نقطه مانند A که از مرکز دایره به فاصله R باشد، روی دایره قرار دارد،

$$A \text{ روی دایره} \Rightarrow OA = R \text{ در صفحه به طوری که}$$

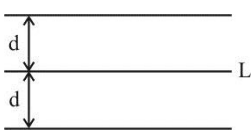


به طور خلاصه، نقطه A روی دایره است، اگر و تنها اگر $OA = R$ باشد.

به عبارت معادل، می‌گوییم «دایره $C(O, R)$ ، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌شان از یک نقطه ثابت به نام مرکز دایره برابر مقداری ثابت به نام شعاع دایره است».



نکته: مکان فوق در فضا (یعنی مکان هندسی نقاطی از فضا که از نقطه‌ی O به فاصله‌ی R می‌باشند)، یک کره به مرکز O و شعاع R است.



← مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک خط داده شده‌ی L به فاصله‌ی مشخص d می‌باشند، دو خط موازی

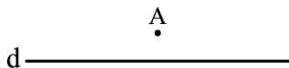
L و در دو طرف آن است با فاصله‌ی d از آن.

سؤال: مکان فوق در فضا چه می‌شود؟

کاربردهای مکان هندسی:

یکی از مهم‌ترین کاربردهای مکان هندسی، ترسیم‌های هندسی و یافتن نقطه (یا نقاطی) است که دارای ویژگی معینی باشند. برای این کار اگر S_1 را مکان هندسی نقاطی با ویژگی شماره ۱ و S_2 را مکان هندسی نقاطی با ویژگی شماره ۲ در نظر بگیریم، $S_1 \cap S_2$ مجموعه نقاطی است که هر دو ویژگی را دارد. بنابراین برای یافتن نقاط مورد نظر باید نمودارهای S_1 و S_2 را رسم کرده و نقطه (یا نقاط) برخورد آنها را به دست آوریم.

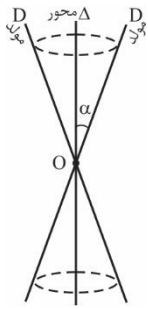
مثال: در شکل مقابل، نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از نقطه‌ی A باشند. مسأله چند جواب دارد؟



مثال: دایره‌ی (C) و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایره‌ی (C) تعیین کنید که از خط Δ به فاصله‌ی معلوم ۳ باشد. مسأله چند جواب دارد؟

مثال: دو نقطه‌ی A و B و خط d در یک صفحه واقع‌اند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشد. مسأله چند جواب دارد؟

*** تعریف سطح (رویه) مخروطی دوار**

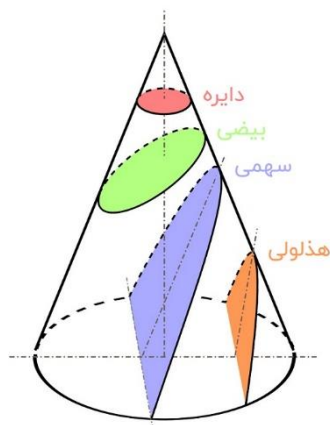


اگر دو خط D و Δ مطابق شکل در نقطه‌ی O متقاطع باشند و خط Δ ثابت و خط D حول خط Δ با زاویه‌ی ثابت α ($\alpha \neq 90^\circ$) دوران کند، سطحی به وجود می‌آید که به آن **سطح مخروطی دوار** می‌گوییم.

خط D را **مولد**، خط Δ را **محور** و نقطه‌ی O را **رأس** سطح مخروطی می‌نامیم و هر یک از دو قسمت مخروطی شکل به وجود آمده را که در دو طرف رأس قرار دارد، یک **دامنه** می‌نامیم.

*** تعریف مقطع مخروطی**

اگر سطح مخروطی را با یک صفحه برش دهیم، حالت‌های مختلفی به عنوان فصل مشترک به وجود می‌آید که به این فصل مشترک‌ها، **مقطع مخروطی** گفته می‌شود.



(الف) اگر صفحه‌ای عمود بر محور، سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک، یک **دایره** خواهد بود.

⊖ حالت خاص: اگر صفحه در نقطه‌ی O (رأس) بر محور عمود شود، آنگاه فصل مشترک، یک **نقطه** خواهد بود.

(ب) اگر صفحه‌ای غیر عمود بر محور و غیر موازی مولد، یک دامنه‌ی سطح مخروطی را قطع کند، مقطع مخروطی حاصل، **بیضی** نام دارد.

(پ) اگر صفحه‌ای موازی مولد، یک دامنه‌ی سطح مخروطی را قطع کند، مقطع مخروطی حاصل، **سهمی** نام دارد.

⊖ حالت خاص: اگر صفحه‌ی موازی مولد، از رأس سطح مخروطی بگذرد، آنگاه هر دو دامنه را قطع خواهد کرد و فصل مشترک، یک **خط** خواهد بود.

(ت) اگر صفحه‌ای موازی محور سطح مخروطی، هر دو دامنه را قطع کند، منحنی حاصل که از دو تکه‌ی جدا از هم تشکیل شده، **هذلولی** نام دارد. (در این کتاب به تعریف هذلولی نخواهیم پرداخت)

⊖ حالت خاص: اگر صفحه، شامل محور باشد، آنگاه فصل مشترک، **دو خط متقاطع** خواهد بود.

تمارین صفحه ۳۹ کتاب

۱- مکان هندسی هر یک از مجموعه نقاط زیر را مشخص کنید: الف) نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند.

ب) مرکزهای همه دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه ثابت A مماس‌اند.

پ) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند.

ت) مرکزهای همه دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارجی‌اند.

۲- نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید)